Problemă: Demonstrați că dacă a, b sunt întregi pozitivi, iar $ab+1$ divide a^2+b^2, atunci raportul $(a^2+b^2)/(ab+1)$ este pătrat perfect.

Soluția: Scriem $a^2+b^2 = N(ab+1)$. Vom demonstra ca N este pătrat perfect.

Observăm [această observație este cea mai importantă în rezolvare] că relația de mai sus este o ecuație de gradul 2 în a, $a^2 - Nba + b^2 - N = 0$

Cealaltă soluție este $Nb-a$, conform formulei care dă suma celor două rădăcini ale ecuației de gradul 2 (Nb în cazul nostru).

Deci dacă (a, b) este o soluție, atunci $(Nb-a, b)$ este o soluție.

Considerăm o soluție (a,b), și pentru că ecuația este simetrică în a și b, putem presupune că a este mai mare sau egal cu b.

Avem 3 cazuri:

i. Dacă $b^2 - N = 0$, problema este rezolvată, căci $N = b^2$ este pătrat perfect.

ii. Dacă $b^2 - N > 0$, folosim a doua relație între rădăcinile ecuației de gradul 2, $a(Nb-a) = b^2 - N$. Rezultă pe de o parte ca $Nb-a$ este pozitiv. Pe de alta parte $b^2 - N$ este mai mic decât b^2 și a este mai mare sau egal cu b, deci $Nb-a$ este mai mic decât a. Rezultă că de la o soluție (a,b) am obținut o soluție $(Nb-a, b)$ mai “mică”, adică $(Nb-a) + b < a + b$. [asta a fost a doua observație importantă pentru rezolvare]

iii. Dacă $b^2 - N > 0$, folosim a doua relație între rădăcinile ecuației de gradul 2, $a(Nb-a) = b^2 - N$. Rezultă că $Nb-a$ este negativ, deci ca $a > Nb$. [aici intervine a treia observație/intuiție, cu cât raportul a/b este mai mare, cu atât numărul $(a^2+b^2)/(ab+1)$ este mai mare, și pare că va fi prea mare]. În acest caz avem

$(a^2+b^2)/(ab+1) = (a^2+b^2)/ab \times ab/(ab+1) = (a/b + b/a)\ (1-1/ab)$

Din ipoteza $(a/b + b/a)$ este cel puțin $(N+1/N)$ iar $(1-1/ab)$ este cel puțin $(1-1/N^3)$.

Cu un calcul scurt rezultă că $(a^2+b^2)/(ab+1)$ este mai mare decât N, contrar ipotezei.

Cu asta, problema este rezolvată. Am văzut că dacă (a,b) este o soluție și N nu este pătrat perfect găsim o soluție mai mică. Considerăm soluția (a,b) cea mai mică. Întrucât nu există soluție mai mică, rezultă că N este pătrat perfect.